ΠΡΟΤΑΣΗ 107

Έστω $(V, \langle \, \rangle)$ χ.ε.Γ πεπ. διαστασης και $T: V \to V$ γραμμική. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα (i) T ισομετρία (ii) T 1-1 ΕΠΙ και $T^* = T^{-1}$

ΑΠΟΔ (i) => (ii) Αφού T ισομετρία, T 1-1 και ΕΠΙ. Θα δείξουμε ότι $T^* = T$. Από τον ορισμό της T^* αρκεί ν.δ.ο $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^{-1}(w) \rangle$ (1) $\forall v, w \in V$. Έστω $v, w \in V$. Θέτουμε $z = T^{-1}(w)$ άρα $w = T(z)$. Αφού T ισομετρία

$\langle T(v), w \rangle = \langle T(v), T(z) \rangle \overset{T \text{ ισομετρία}}{=} \langle v, z \rangle = \langle v, T^{-1}(w) \rangle$. Επομένως η (1) ισχύει και άρα $T^* = T^{-1}$.

(ii) => (i). Υποθ. ότι T 1-1, ΕΠΙ και $T^* = T^{-1}$. Θα δείξουμε ότι T ισομετρία

δηλ. ότι $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v,w\rangle$ ② για κάθε $v,w\in V$. Έστω $v,w\in V$. Θέτουμε $z = T^{-1}(w)$ άρα $T(z)=w$. Έχουμε $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle T(v), z\rangle \overset{\text{ορισμ. } T^*}{=}$
$= \langle v, T^*(z)\rangle \overset{T^*=T^{-1}}{=} \langle v, T^{-1}(z)\rangle = \langle v,w\rangle$. Άρα T ισομετρία

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 168 (ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗ 149)

ΠΡΟΤΑΣΗ 149 Έστω $(V, \langle\,\rangle)$ χ.ε.γ. πεπερ. διάστασης $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ και $T: V\to V$ γραμμική. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
(i) T ισομετρία (ii) Για κάθε ορθοκανονική βάση e του V ο $n\times n$ πίνακας $[T]_e^e \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ορθογώνιος. (iii) Υπάρχει ορθοκανονική βάση g του V ώστε ο πίνακας $[T]_g^g$ είναι ορθογώνιος.

ΑΠΟΔ (i)$\Rightarrow$(ii) Έστω T ισομετρία, e ορθοκανονική βάση του V. Θέτουμε $A = [T]_e^e \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Αφού T ισομετρία, έχουμε A αντιστρέφεται. Θέτουμε $B=[T^*]_e^e$. Από πρόταση 161 $B=A^t$ ①. Από πρόταση 167 $T^* = T^{-1} \Rightarrow [T^*]_e^e = [T^{-1}]_e^e = ([T]_e^e)^{-1}$. Άρα $B = A^{-1}$ ②. Από ①,② έπεται A ορθογώνιος.
(ii)$\Rightarrow$(iii) Άμεσο. (iii)$\Rightarrow$(i) Έστω g ορθοκανονική βάση του V, ώστε $[T]_g^g \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ορθογώνιος. Θα δείξουμε T ισομετρία. Θέτουμε $A = [T]_g^g$ $B=[T^*]_g^g$. Από υπόθ. $\overset{(iii)}{A}$ ορθογώνιος $\Rightarrow A$ αντιστρέφεται με $A^{-1}=A^t$. Επομένως $BA = I_n$ $AB = I_n$. Από Γρ Ι $AB = I_n \Rightarrow [T]_g^g [T^*]_g^g = I_n \Rightarrow [T\circ T^*]_g^g = I_n = [id_V]_g^g$ ① Ομοίως $BA = I_n \Rightarrow [T^*\circ T]_g^g = I_n = [id_V]_g^g$ ②. Από Γρ Ι, η απεικόνιση (γρ απ $V\to V$) $\to \mathbb{R}^{n\times n}$ $S \mapsto [S]_g^g$ είναι 1-1 (και επί). Από (1) $\Rightarrow T\circ T^* = id_V$ (2) $\Rightarrow T^*\circ T = id_V$. Άρα $T^* = T^{-1}$ και από πρόταση 167 $\Rightarrow T$ ισομετρία

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ 169. Ένας πίνακας $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται συμμετρικός αν $A^t = A$

ΠΡΟΤΑΣΗ 170
Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Κάθε ιδιοτιμή A στο $\mathbb{C}$ είναι πραγματική (δηλ. $\chi_A(x)$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες.
ΑΠΟΔ. Έστω $\lambda\in\mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A. Θα δείξουμε $\lambda\in\mathbb{R}$ ισοδύναμα ότι $\lambda=\bar{\lambda}$. Έχουμε ότι υπάρχει $X\in\mathbb{C}^{n\times 1}$ ώστε $AX = \lambda X \Rightarrow \overline{(AX)} = \overline{(\lambda X)} \Rightarrow A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ ①

Έχουμε $(A\bar{x})^t x = (\bar{x}^t A^t) x \overset{A=A^t}{=} \bar{x}^t (Ax) = \bar{x}^t \lambda x = \lambda(\bar{x}^t x)$ ② Από την ① έχουμε
$(A\bar{x})^t x = (\bar{\lambda}\bar{x})^t x = \bar{\lambda}(\bar{x}^t x)$ ③. Από ②,③ έχουμε $\lambda(\bar{x}^t x) = \bar{\lambda}(\bar{x}^t x)$. Αφού $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ με
$x \neq \mathbb{O}_{n\times1} \Rightarrow \bar{x}^t x = [a]$ ο θετικός πραγματικός πράγματι $x = \begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ \vdots \\ z_n\end{bmatrix}$ $\bar{x}^t x = [|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2]$
Άρα η ④ $\Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})a = 0 \overset{a\neq0}{\Rightarrow} \lambda = \bar{\lambda}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 171

Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός και $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ ιδιοτιμές του A με $\lambda_1\neq\lambda_2$. Τότε οι υπόχωροι $V_A(\lambda_1)$ $V_A(\lambda_2)$ είναι ορθογώνιοι ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^{n\times1}$.

ΑΠΟΔ Έστω $X\in V_A(\lambda_1)\subseteq\mathbb{R}^{n\times1}$ Τότε $AX=\lambda_1X$ ①
$Y\in V_A(\lambda_2)\subseteq \mathbb{R}^{n\times1}$ $AY=\lambda_2Y$ ②

Θα δείξουμε ότι $\langle X,Y\rangle = 0_{\mathbb{R}}$. Ισοδύναμα ότι $X^t\cdot Y = \mathbb{O}_{1\times1}$. Αφού $\lambda_1\neq\lambda_2$ τουλάχιστον ένα από τα λ_1,λ_2 είναι μη μηδενικό. Ενδεχομένως, με εναλλαγή των λ_1,λ_2 υποθ. ότι $\lambda_1\neq0_{\mathbb{R}}$
Έχουμε $X^tY = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1X)^tY \overset{\text{από ①}}{=} \frac{1}{\lambda_1}(AX)^tY = \frac{1}{\lambda_1}X^tA^tY \overset{A=A^t}{=} \frac{1}{\lambda_1}X^tA^tY \overset{A=A^t}{=} \frac{1}{\lambda_1}X^t(AY) = \frac{1}{\lambda_1}X^t(\lambda_2Y)$
$=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}X^tY$ Άρα $X^tY = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(X^tY) \Leftrightarrow (1_{\mathbb{R}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1})X^tY = \mathbb{O}_{1\times1}$ ③
Αφού $\lambda_1\neq\lambda_2$ $1_{\mathbb{R}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\neq 0_{\mathbb{R}}$. Άρα η ③ συνεπάγεται $X^tY = \mathbb{O}_{1\times1}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 172 (Χωρίς απόδειξη)

Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $P^{-1}AP$ = διαγώνιος. Σαν πόρισμα, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

ΑΠΟΔ (Βασικές ιδέες)

Επαγωγή στο n, Από θεμ. θεώρ. άλγ ο A έχει ιδιοτιμή $\lambda\in\mathbb{C}$. Από πρόταση 170 $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα υπάρχει $0\neq v\in\mathbb{R}^{n\times1}$ ιδιοδιάνυσμα δηλ. $Av=\lambda v$. Θέτουμε $L=\langle \omega\rangle$ ← ο 1-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n\times1}$ που παράγεται από το v. Θέτουμε $W = L^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n\times1}$ ορθοσυμπλήρωμα του L ως προς το κανονικό εσ. γινόμενο του $\mathbb{R}^{n\times1}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ-ΚΛΕΙΔΙ Αφού A συμμετρικός $(A=A^t)$ ο W είναι A-αναλλοίωτος, δηλ. $w\in W \Rightarrow A(w)\in W$. Έστω $w\in W$. Τότε $\langle v,w\rangle = 0_{\mathbb{R}}$. Άρα $\langle v, Aw\rangle \overset{A=A^t}{=} \langle Av,w\rangle = \langle\lambda v,w\rangle = 0_{\mathbb{R}}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εύρεση ορθογώνιας $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ όπως στην πρόταση 172. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_k$ του A. Έστω $e_1,e_2,\dots,e_{t_1}$ ορθ. βάση του $V_A(\lambda_1)$ $e_{t_1+1},\dots,e_{t_2}$ ορθ. βάση του $V_A(\lambda_2)$

$e_{t_{k-1}+1},\dots,e_n$ » » » $V_A(\lambda_k)$

Θέτουμε $P = [e_1|e_2| \ldots |e_{t_1}|e_{t_1+1}| \ldots |e_{t_k}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε P ορθογώνιος και $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & B_k \end{bmatrix}$

με $B_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{t_1 \times t_1}$ $B_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(t_2-t_1)\times(t_2-t_1)}$

$B_3 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(t_3-t_2)\times(t_3-t_2)}$

$B_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & & 0 \\ & \lambda_k & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(t_k-t_{k-1})\times(t_k-t_{k-1})}$